5/5/17 Μαθημα 15ο

Ασκηση 1 Φυλλαδιο #5

$\phi: Z_4 \to GL(2,C)$

$\phi(1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\phi(n) = \phi(1)^n$

$\phi(n_1+n_2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n_1+n_2} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n_1}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n_2} =$

$= \phi(n_1)\cdot\phi(n_2)$

$a \equiv b \mod 4 \Rightarrow \alpha = b+4k$

$\phi(\alpha) = \phi(b)$

$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{b+4k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{b} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{4k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{4}\right)^{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} i^4 & 0 \\ 0 & i^4 \end{pmatrix}^{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ισχυει

Εστω $0 \le n_1 \le 3$ με $\phi(n_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} i^{n_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$i^{n_1} = 1$, αλλα $o(i) = 4$ στων $\mathbb{C}^*$

$n_1 = 0 \mod 4$ και $0 \le n_1 \le 3 \Rightarrow n_1 = 0$

$1 \equiv 5 \mod 4$ $\phi(1) = \phi(5)$ $1-5 \in Ker\phi$.

$\phi: G \to G$ ομομ.

$Ker\phi = \{1\} \Leftrightarrow \phi$ 1-1

$\phi(n_1) = \phi(n_2) \Rightarrow$

$\phi(n_1)\cdot\phi(n_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\phi(n_1)\cdot\phi(-n_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\phi(n_1 - n_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$n_1 - n_2 \in Ker\phi$.

Ασκηση 2

$\phi' : Z_4 \to GL(2, \mathbb{C})$ $\phi(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\phi(n) = \phi(1)^n$

$a \equiv b \bmod 4 \Rightarrow a = b + 4k \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{b+4k} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^b$

Αρκει $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4\right)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ισχυει $\Rightarrow$ καλα ορισμενη

Απο τον τυπο $\phi(n) = \phi(1)^n$ είναι ομομορφ.

$\phi(n_1 + n_2) = \phi(1)^{n_1+n_2} = \phi(1)^{n_1} \cdot \phi(1)^{n_2} = \phi(n_1) \cdot \phi(n_2)$

Αν $\phi(n_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^{n_1} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n_1 = 2k$ αρτιος

Αρα εαν $0 \leq n_1 \leq 3 \Rightarrow n_1 = 0, 2$ και $\ker\phi = \{0, 2\} \Rightarrow \phi$ οχι 1-1

Υπενθυμιση

Αν $\phi : G \to G$ ομομορφισμος τοτε:

$o(\phi(a)) \mid o(a)$

$o\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid o(1)$

Ασκηση 3

$\phi : Z_4 \to GL(2, \mathbb{C})$

$\phi(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\phi(n) = \phi(1)^n$

Δεν είναι διοτι $o(1) = 4$

$o\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \infty$ αρα δεν είναι, και οχι

$o(\phi(a)) \mid o(a)$

Ασκηση 4

$\phi: \Sigma_3 \to GL(3, \mathbb{R})$ $\quad \phi(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\phi(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ξερω $S_3 = \langle (1,2), (1,3) \rangle = \langle \overset{f}{(1,2,3)}, \overset{g}{(1,2)} \rangle$

$(1,2,3) = (1,3)(1,2)$ $\quad o(f) = 3$

$o(g) = 2$

Ομομορφισμός:

1) Θα εξετάσω την σχεση $o(\phi(\alpha)) \mid o(\alpha)$

$o(1,2) = o(1,3) = 2.$

ταξη 2.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$

$o\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ταξη 2.

$\phi((1,3)(1,2)) = \phi(1,3)\phi(1,2)$

$\phi((1,2)(1,3)) = \phi(1,2)\phi(1,3)$

Το θεωρουμε οτι ισχύει $\Rightarrow$ ϕ ομομορφισμος

ϕ 1-1

Εχουμε ότι $gfg = f^2$ στο $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$.

$g^f g = 1^2$

Έχουμε: $(1,2)(1,3)\cancel{(1,2)(1,2)} = (1,3)(1,2)(1,3)(1,2)$

$(1,2)(1,3) = (1,3)(1,2)(1,3)(1,2)$

$\phi(\qquad) = \phi(\qquad) \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi(1,2)(1,3) = \phi(1,3)\phi(1,2)\phi(1,3)\phi(1,2)$

$AB = BABA$ αν ισχύει αυτό $\Rightarrow \phi$ 1-1.

Άσκηση 5

$\phi: G \to K$ αβελιανή.

$H \leq G$ με $Ker\phi \leq H \Rightarrow H \trianglelefteq G$.

Πρέπει $ghg^{-1} \in H \ \forall g \in G, h \in H$

$\phi(ghg^{-1}) = \phi(g)\phi(h)\phi(g)^{-1} = \phi(g)\cdot\phi(g)^{-1}\phi(h)$

$= \phi(h) \Rightarrow \phi(ghg^{-1})\phi(h)^{-1} = 1_K \Rightarrow$

$\phi(ghg^{-1}h^{-1}) = 1_K \Rightarrow ghg^{-1}h^{-1} \in Ker\phi \leq H$

$\Rightarrow ghg^{-1}h^{-1} \in H \Rightarrow ghg^{-1}h^{-1} = h' \Rightarrow ghg^{-1} = h'h^{-1}$

Άσκηση 6

α) $G_1 = \langle a \rangle \Rightarrow G_2$ κυκλική

Θα δείξουμε $G_2 = \langle \phi(a) \rangle$

Έστω $g \in G_2 \to \exists b \in G_1$ με $\phi(b) = g$. A $b = a^k \Rightarrow$

$\phi(b) = \phi(a^k) \Rightarrow g = (\phi(a))^k$

b) $\phi: G_1 \to G_2$ κυκλική

$S_n \to \mathbb{Z}_2$

$\sigma \mapsto 0 \qquad \sigma$ άρτια

$\sigma \mapsto 1 \qquad \sigma$ περιττή

Ασκηση 7

1) $\phi : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_3$ $\quad 1 \to \phi(1) \Rightarrow o(\overset{1,3}{\phi(1)}) \mid o(1) = 4 \Rightarrow o\phi(1) = 1 \Rightarrow \phi(1) = 0 \Rightarrow \phi$ τετριμ.

2) $\phi' : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_4$

3) $\phi'' : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_8$

4) $\phi''' : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_4$

2) $1 \longmapsto \phi'(1) \Rightarrow o\overset{1,2,4}{\phi'(1)} \mid o(1) = 3 \Rightarrow o\,\phi'(1) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi(1) = 0$ άρα ϕ τετριμμενη

3) $1 \longmapsto \phi''(1) \Rightarrow o\,\underset{1,2,4,8}{\phi''(1)} \mid o(1) = 4 \Rightarrow o\,\phi''(1) = 1 \Rightarrow \phi''$ τετρ.

$o\,\phi''(1) = 2 \Rightarrow \phi''(1) = 4$

$o\,\phi''(1) = 4 \Rightarrow \phi''(1) = 2$

4) $o(\phi'''(1)) \mid o(1) = 8$

$o(\phi'''(1)) = 1$, ϕ''' τετριμ.

$o(\phi'''(1)) = 2 \Rightarrow \phi'''(1) = 2$

$o(\phi'''(1)) = 4 \Rightarrow \phi'''(1) = 1$ επιμορφ.

$\phi'''(1) = 3$

Δακτυλιους

$(R, +, \cdot)$ δυο πράξεις

$(R, +)$ αβελιανή ομάδα

$(R, \cdot)$ ομαδοειδές και επιμεριστική:

$\alpha(b+c) = \alpha b + \alpha c$

$(\alpha+b)c = \alpha c + bc$

Αν εχει και μοναδιαιο, μοναδιαιοι δακτυλιοι

Αν είναι μοναδιαίος και ενδιαφέρουν τα στοιχεία τα οποία είναι μονάδες. Δηλαδή α μονάδα $\Leftrightarrow$ $\exists b \in R$ με $\alpha b = 1 = b\alpha$

$R_\mu = \{\alpha \mid \alpha \in R$ και α μονάδα$\}$

$\alpha\alpha'$ μονάδα, (α, α' μονάδα)

$\alpha\alpha'(\alpha')^{-1}\alpha^{-1} = 1_R = (\alpha')^{-1}\alpha^{-1}\alpha'\alpha$

(R_μ, $\cdot$) κλειστή πράξη. Προσεταιριστική είναι γιατί είναι στο R. $1_R \in R_\mu$ και κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο $\Rightarrow$ R_μ ομάδα.

Προσοχή στα:

μηδενοδιαιρέτες: $\alpha, b \neq 0$ και $ab = 0$

μηδενοδύναμα: $\alpha \neq 0$ και $\alpha^k = 0$.

Καλός δακτύλιος: Ακέραια περιοχή = Αντιμεταθετικός, μοναδιαίος, χωρίς μηδενοδιαιρέτες.

Μονάδα όχι μηδενοδιαιρέτης

Καλός-Καλός Δακτύλιος = Διαιρετικός = $R^* = R - \{0\}$ ομάδα

Καλός-Καλός-Καλός Δακτύλιος = Διαιρετικός και αντιμεταθ. = Σώμα.

Ορισμός:

Έστω R ακέραια περιοχή. Αν $\exists$ φυσικός k με $k 1_R = 0_R$ και k ελάχιστος τότε λέμε ότι ο R έχει χαρακτηριστική k. Διαφορετικά έχει χαρακτηριστική 0. Γράφουμε $char(R) = k$ ή 0.

$$k \cdot 1_R = \underbrace{1_R + 1_R + \dots + 1_R}_{k} = 0$$

π.χ. Οι $\mathbb{R}$ έχει χαρακτηριστική 0.

Το $\mathbb{Z}$ έχει χαρακτηριστική 0.
Το $\mathbb{Z}_p$ έχει χαρακτηριστική p.
Το $\mathbb{Z}_5$ -//- 5.
Το $\mathbb{Z}_6$ δεν έχει -//- 6 γιατί δεν είναι ακέραια περιοχή γιατί έχει μηδενοδιαιρέτες $[2]\cdot[3] \Rightarrow$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \neq 0 \quad \neq 0$

<u>Πρόταση</u>: Αν ο δακτύλιος R έχει χαρακτηριστική $k>0$, τότε k πρώτος.

Απόδειξη:
Έστω $char(R) = k > 0$ και $k = pk'$ με p πρώτο
$\Rightarrow k' < k$
$k1_R = 0_R \Rightarrow (pk')1_R = 0_R \Rightarrow (pk')1_R \cdot 1_R = 0_R \Rightarrow$
$(p1_R)(k'1_R) = 0_R \xrightarrow[A-\Pi]{R} p1_R = 0 \Rightarrow charR = p < k$
$k'1_R = 0 \Rightarrow charR = k' < k$

<u>Υποδακτύλιος</u>

Ορισμός: Έστω R δακτύλιος και $S \subseteq R$ ώστε να είναι επίσης δακτύλιος με τις <u>ίδιες</u> πράξεις. Τότε ο S καλείται υποδακτύλιος του R και γράφουμε $S \leq R$

π.χ. Οι υποδακτύλιοι του $\mathbb{Z}$ είναι μορφής $k\mathbb{Z}$. Διότι οι υποομάδες του $\mathbb{Z}$ (πρόσθεση) είναι $k\mathbb{Z}$. Αρκεί να "δουλεύει" το γινόμενο
$(km)(km') = km'' = k(kmm')$
Άρα η πράξη του πολ/μου είναι καλά ορισμένη στο $k\mathbb{Z}$.

Ο $\mathbb{Z}$ είναι μοναδιαίος δακτύλιος
$2\mathbb{Z}$ όχι μοναδιαίος αλλά είναι δακτύλιος.
$2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

π.χ. Οι υποδακτύλιοι του $\mathbb{Z}_n$ είναι όλες οι υποομάδες του $\mathbb{Z}_n$ δηλ. $m\mathbb{Z}_n$ π.χ. ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}$ έχει υποδακτύλιο τον $\underbrace{\mathbb{Z} \times \{0\}}_{\text{μοναδιαίο } (1,0)}$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ μοναδιαίο με $(1,1)$ $\neq$

Της υποομάδας το μοναδιαίο είναι το ίδιο με το μοναδιαίο της ομάδας ΕΔΩ ΟΧΙ!

Πρόταση

Αν R δακτύλιος και $S \subseteq R$ τότε $S \leq R$ αν-ν $(S,+)$ αβελιανή και $\forall s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 \cdot s_2 \in$

Ισοδύναμα: αν-ν $\forall s_1, s_2 \in S$ ισχύει:
$s_1 - s_2 \in S$ και $s_1 s_2 \in S$

$(S,+) \leq (R,+)$ αν-ν $s_1 - s_2 \in S$
ή δείχνω ότι η πράξη είναι κλειστή

απόδειξη
$S \leq R$ υποδακτύλιος => οι συνθήκες ισχύουν
Υποθέτω ότι ισχύει : $\forall S_1, S_2 \in S$: $S_1 - S_2 \in S$
και $S_1 S_2 \in S$ Θ.δ.ο $\boxed{S \leq R}$

Η συνθήκη $S_1 - S_2 \in S$ => $(S, +) \leq (R, +)$ υποομάδα
με την πρόσθεση. Επίσης η συνθήκη $S_1 S_2 \in S$
=> η πράξη του πολλ/μού είναι καλά ορισμένη
στο S.

Πρέπει ακόμα ν.δ.ο ο πολλ/μος είναι προσεταιριστικός
και ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα.
Αν $S_1, S_2, S_3 \in S$ => $(S_1, S_2) S_3 \in S$ και

$S_1 (S_2, S_3) \in S$ γιατί η πράξη είναι κλειστή και
τα παίρνω ανά δύο
Πρέπει $(S_1, S_2) S_3 = S_1 (S_2, S_3)$ αλλά αυτό ισχύει
στον $\mathbb{R}$.

Επίσης $S_1 (\underbrace{S_2 + S_3}_{\in S}) \in S$

$\underbrace{S_1 + S_2}_{\in S} + \underbrace{S_1 + S_3}_{\in S} \in S$

Πρέπει ακόμη $S_1 (S_2 + S_3) = S_1 S_2 + S_1 S_3$ αλλά αυτό
ισχύει στον $\mathbb{R}$

Πρέπει $S \neq \emptyset$

π.χ. Έστω το σύνολο $f(\mathbb{R}) = \{$απεικονίσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

Εφοδιάζεται με 2 πράξεις
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$(fg)(x) = f(x)\,g(x)$

Δακτύλιος (προσεταιριστικός, αντιμεταθετικός γιατί ανάγεται στο γινόμενο των πραγματικών συναρτήσεων → αριθμός που είναι αντιμ. προσετ.)

Αντιμεταθετικός δακτύλιος $fg = gf$
$(fg)(x) = (gf)(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

Μοναδιαίος: $1_{f(x)}$ = σταθερή στο 1

$1(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Κάθε μη μηδ. στοιχείο έχει αντίστροφο

η ταυτοτική 1-1 και επί: $f(x) = x$ δεν έχει αντίστροφο
δεν αντιστρεφ. $f(0) = 0$ δεν έχει αντίστροφο στο πουθενά άλλο εκτός από το 0.

Αν $f(x) \neq 0 \not\Rightarrow$ η f αντιστρέφεται

Αντιστρέφονται όλες οι οποίες δεν λαμβάνουν την τιμή 0.

- $S = \{ f \in F(\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \}$ δεν αντιστρέφεται

Είναι υποδακτύλιος $S \leq F(\mathbb{R})$;
Θα πάρω 2 απεικ. θα τις αθροίσω, θα τις πολλ/σω και θα δω αν ανήκουν στο σύνολο μου

$\forall f_1, f_2 \in S \Rightarrow f_1(0) - f_2(0) = 0 - 0 = 0$

$\Rightarrow f_1 - f_2 \in S \quad (\Leftrightarrow (f_1 - f_2)(0) = 0 \Leftrightarrow f_1(0) - f_2(0) = 0)$

$f_1(0) \cdot f_2(0) = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f_1 f_2 \in S \quad \Rightarrow S < F(\mathbb{R})$

είναι υποδακτύλιος

- $T = \{ f \mid f \in F(\mathbb{R}) \text{ με } f(0) = 1 \}$

$T \not< F(\mathbb{R})$

Αν πάρω $f_1, f_2 \in T \Rightarrow (f_1 - f_2)(0) = f_1(0) - f_2(0) =$
$= 1 - 1 = 0 \neq 1 \Rightarrow f_1 - f_2 \notin T$

→ $Q_8 = \{ \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \}$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$
$ij = k$ όχι αβελιανή
$ji = -k$ $Q_8 \not\cong D_4$

$H = \{ \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \}$
με την πρόσθεση και το γινόμενο να έρχεται από την Q_8.

$(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k) + (\alpha' + \beta' i + \gamma' j + \delta' k) =$
$(\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') i + (\gamma + \gamma') j + (\delta + \delta') k$

Αυτός είναι διαφορετικός δακτύλιος και όχι σώμα δλδ. δεν είναι αντιμεταθετικό

Στην θεωρία ομάδων

O ομάδα => βρες τις υποομάδες
Βρες τις κανονικές υποομάδες
Αν έχω μια κανονική ορίζω ~~ονομαστα~~ αυτόματα την ομάδα πηλίκο O/H.

$O/H = \{\alpha H : \alpha \in O\}$
$(\alpha H) = (\alpha' H) = (\alpha\alpha')H$

Στην θεωρία δακτυλίων

R δακτύλιος => Βρες τους υποδακτυλίους
R δακτύλιος είναι αβελιανή ομάδα άρα δεν έχει νόημα να μιλάω για κανονικότητα.
$(R, +, \cdot)$
$S \leq R$

· $R/S =$

Συμπλοκα $r+S$ ή rS γιατί ο δακτύλιος έχει 2 πράξεις
δεν θα ορίσει καλά! το ξεχνάω
ορίζεται?
ΝΑΙ

$(S,+) \trianglelefteq (R,+)$ αβελιανή
$(r+S) + (r'+S) = (r+r') + S$ $(S+S \to S)$

$(r+S)\cdot(r'+S) = rr' + rS + Sr' + S$